Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

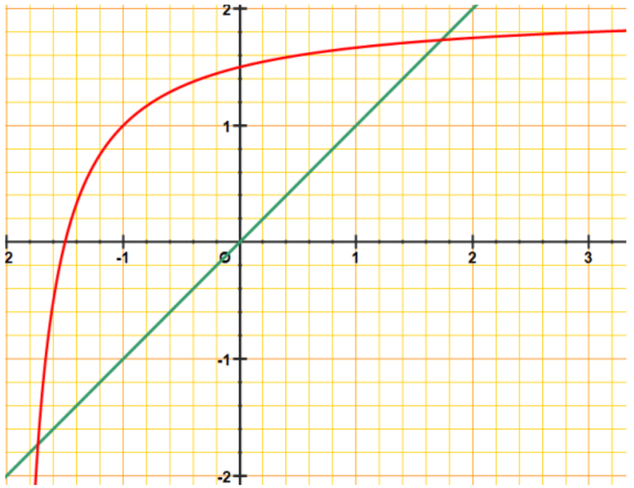
Représentation graphique d'une suite 2

Exercice :

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n}$

1°) Dans la figure ci-contre, sont représentées les courbes des fonctions f et g définies par :

$f(x) = \dfrac{3+2x}{2+x}$ et $g(x) = x$



Utiliser ce graphe pour représenter sur l'axe des abscisses, en expliquant, les trois premiers termes de la suite (u_n).

2°) Démontrer par récurrence que u_n est positif pour tout entier naturel n non nul ; en déduire que u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3°) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{2+u_n}$

b) En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \sqrt{3}$

4°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5°) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Vérifier que pout tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{(2-\sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(u_n + \sqrt{3})}$

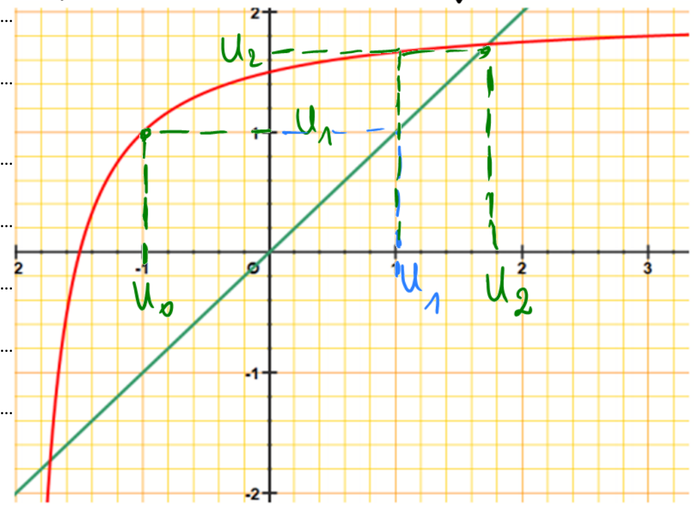
b) En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $(2-\sqrt{3})^2$

c) Exprimer v_n en fonction de n puis déterminer sa limite.

d) Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire la limite de la suite (u_n).

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

; $u_1 = f(u_0)$; $u_2 = f(u_1)$



2) Pour $n=1$; $u_1 = f(u_0) = f(-1) = 1 > 0$ (Vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $u_n \geqslant 0$

et montrons que $u_{n+1} \geqslant 0$

• $u_n \geqslant 0 \Rightarrow 3 + 2u_n \geqslant 0$ et $2 + u_n \geqslant 0$

Donc $\dfrac{3+2u_n}{2+u_n} \geqslant 0 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant 0$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$; $u_n \geqslant 0$ donc $2 + u_n \geqslant 2$

donc $2 + u_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

• u_0 existe

$\Rightarrow$ (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$.

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+2} = \dfrac{2u_n+4-1}{u_n+2}$

$= \dfrac{2(u_n+2)-1}{u_n+2} = 2 - \dfrac{1}{u_n+2}$

$\Rightarrow$ $a = 2$ et $b = -1$

3) b) pour $n=0$; $U_0 = -1 < \sqrt{3}$ (vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n < \sqrt{3}$ et montrons que $U_{n+1} < \sqrt{3}$.

· $U_n < \sqrt{3} \Rightarrow 2 + U_n < 2 + \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+U_n} > \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2+U_n} < -\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{2+U_n} < 2 - \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

· $2 - \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2 - 2 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow U_{n+1} < \sqrt{3}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n < \sqrt{3}$

4°) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 3}{2+U_n} - U_n$

$$= \frac{2U_n + 3 - 2U_n - U_n^2}{2+U_n}$$

$$= \frac{\sqrt{3}^2 - u_n^2}{u_n + 2} = \frac{(\sqrt{3} - u_n)(\sqrt{3} + u_n)}{u_n + 2}$$

or $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$

$\Rightarrow -\sqrt{3} \leqslant -u_n \leqslant 1$

$\Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{3} - u_n \leqslant 1 + \sqrt{3}$

et $\sqrt{3} + u_n \geqslant -1 + \sqrt{3} > 0$

et $u_n + 2 > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Ainsi (u_n) est croissante

5) a) $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}}$

$$= \frac{\frac{2u_n+3}{2+u_n} - \sqrt{3}}{\frac{2u_n+3}{2+u_n} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{2u_n + 3 - \sqrt{3}(2+u_n)}{2u_n + 3 + \sqrt{3}(2+u_n)}$$

$$= \frac{2u_n + 3 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}u_n}{2u_n + 3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}u_n}$$

$$= \frac{u_n(2-\sqrt{3}) - \sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{u_n(2+\sqrt{3}) + \sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(u_n + \sqrt{3})}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = \dfrac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} \times \underbrace{\left(\dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}\right)}_{v_n}$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \times v_n$$

$$= (2-\sqrt{3})^2 v_n$$

$\Rightarrow$ (v_n) est une suite géométrique de raison $(2-\sqrt{3})^2$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = V_0 \cdot q^n$

où $q = (2-\sqrt{3})^2$

et $V_0 = \dfrac{U_0 - \sqrt{3}}{U_0 + \sqrt{3}} = \dfrac{(-1-\sqrt{3})}{(-1+\sqrt{3})} \times \dfrac{(-1-\sqrt{3})}{(-1-\sqrt{3})}$

$= \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{-2}$

$= -\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2$

Donc $\boxed{V_n = -\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2 \cdot (2-\sqrt{3})^{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2 (2-\sqrt{3})^{2n}$ ($(2-\sqrt{3})^{2n} \to 0$)

car $(2-\sqrt{3})^2 \simeq 0{,}07 \in]-1,1[$

Alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \dfrac{U_n - \sqrt{3}}{U_n + \sqrt{3}}$

$\Rightarrow V_n(U_n + \sqrt{3}) = U_n - \sqrt{3}$

$\Rightarrow U_n(1 - V_n) = \sqrt{3}\,V_n + \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \boxed{U_n = \frac{\sqrt{3}(1+V_n)}{1-V_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3}(1+V_n)}{1-V_n} = \sqrt{3}$ ($1+V_n \to 0$, $1-V_n \to 0$)

D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{3}}$